Métodos Perturbativos Lagrangeanos: Variação de Parâmetros, ou Método Variacional.

- A idéia do método variacional é a de usar a solução de um problema exatamente solúvel para aproximar a solução de um problema cuja solução exata não seja conhecida. Para isto “ajustaremos” as constantes do problema solúvel para que minimizemos a diferença entre as soluções exata e aproximada do problema não exatamente solúvel. Esta técnica encontra âmbito de aplicação ideal através do formalismo Lagrangeano, que está totalmente calcado em princípios variacionais: a procura pelo mínimo orienta o que se deve fazer mesmo que trabalhemos em um espaço reduzido de parâmetros.

- Para ilustrar o método, imaginem que desejamos obter a solução do problema diferencial oriundo do seguinte Lagrangeano descrevendo uma partícula de massa unitária:

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\omega_0^2 x^2 - \xi x^4 \quad , \qquad (1)$$

com $\xi << 1$. A equação diferencial que minimiza a ação

$$S = \int_{t_0}^{t_f} L\, dt \quad , \qquad (2)$$

é obtida na forma

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 4\xi x^3 \quad , \qquad (3)$$

equação não-linear de difícil solução para qual procuraremos uma aproximação mais facilmente tratável.

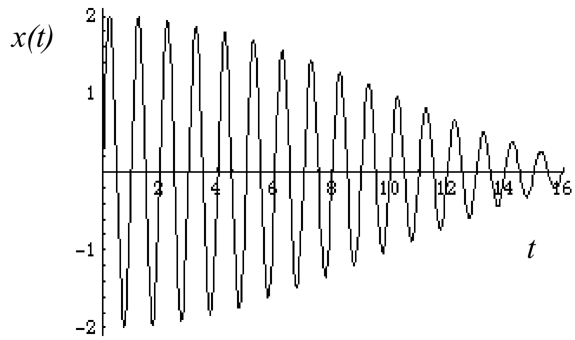
- Para $\xi = 0$, temos um problema linear (oscilador harmônico simples), para o qual a solução completa exata é dada pela expressão

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \quad , \qquad (4)$$

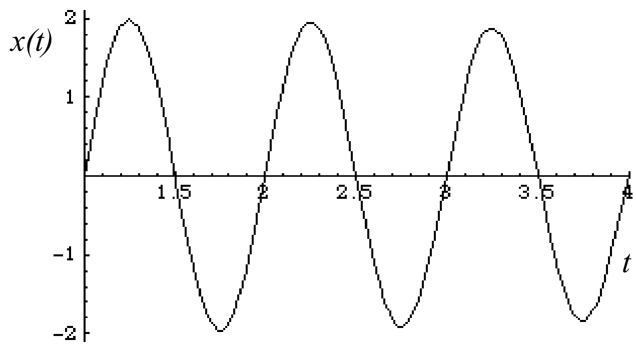
onde a amplitude A e a fase φ são constantes de integração (injetem (4) em (3) com $\xi = 0$ para provar que (4) é de fato solução exata do problema não perturbado).

- Como então implementar o princípio variacional e obter uma solução aproximada do problema completo?

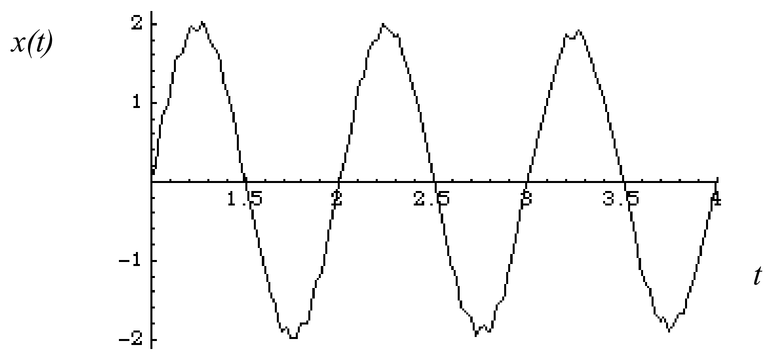
Pois a solução do impasse vai ao longo das seguintes linhas. De (3) vê-se que quando $\xi \neq 0$, com $\xi << 1$, a aceleração será dada pelo valor daquela do oscilador harmônico simples mais uma correção gerada pelo termo perturbativo. Isto revela que a solução completa pode ser pensada como alguma forma harmônica com argumento $\omega_0 t$, mas onde tanto a amplitude e a fase passem a depender lentamente do tempo. Ao longo de um intervalo muito grande, pode-se notar uma variação apreciável na solução, devido a alterações na amplitude e fase



mas se nos focarmos em intervalos relativamente curtos de tempo, a solução "local" é predominantemente a solução do oscilador harmônico:



Deve-se também notar que, além das lentas modulações, pequenas flutuações em x(t) também se fazem presentes. Estas flutuações são de *O(ξ)* e tem efeito menor do que as modulações. Um gráfico equivalene ao anterior, com as flutuações incluídas, seria retratado como



- Pois dado o fato de que a "localmente" a solução do problema completo se assemelha à do oscilador não perturbado, dividiremos a integração (2) em vários trechos ΔT, cada um sendo significativamente maior do que um período do oscilador, mas significativamente menor do que o intervalo típico de modulação. A Eq. (2) é então reescrita como

$$S=\Delta T\left(\frac{\int_{t_0}^{t_0+\Delta T} L\,dt}{\Delta T}+\frac{\int_{t_0}^{t_0+\Delta T} L\,dt}{\Delta T}+\ldots\right)=\sum\langle L\rangle\,\Delta T \quad , \qquad (5)$$

onde $\langle L\rangle$ indica média sómente sobre oscilações devido à "alta" freqüência do oscilador. Nesta média, amplitudes e fases são mantidas constantes por variarem sómente em uma escala muito superior à escala ΔT! O resultado final, oriundo de (5) pode então ser escrito como

$$S=\int \langle L\rangle\, dt \quad , \qquad (6)$$

onde substituimos o somatório por uma integral, já que cada partição ΔT é vista como um infinitésimo pelas quantidades que pouco variam neste intervalo. As equações para fase e amplitude nascem da minimização do funcional final (6), o que gera equações de Euler-Lagrante para as várias variáveis dinâmicas.

- Apliquemos ao caso do Lagrangeano (1), usando (4) com amplitude e fase lentamente moduladas. Temos então

$$\dot{x}(t)=\dot{A}\cos\theta-(\omega_0+\dot{\varphi}(t))A\sin\theta \quad , \qquad (7)$$

onde $\theta\equiv\omega_0 t+\varphi(t)$. Daqui temos

$$\dot{x}^2=\dot{A}^2\cos^2\theta+A^2\sin^2\theta(\omega_0^2+\dot{\varphi}^2+2\omega_0\dot{\varphi})-2\dot{A}A(\omega_0+\dot{\varphi})\sin\theta\cos\theta \quad , \qquad (8)$$

o que nos fornece

$$\langle\dot{x}^2\rangle\approx\frac{1}{2}\dot{A}^2+\frac{1}{2}A^2\omega_0^2+A^2\omega_0\dot{\varphi} \qquad (9)$$

se efetuarmos a média nas altas freqüências (equivalente a média em θ) lembrando que $\langle\cos^2\theta\rangle=1/2$, e negligenciarmos $\dot{\varphi}^2$ frente a $\dot{\varphi}$ (isto é razoável porque a modulação é muito lenta). Usando o fato de que $\langle\cos^4\theta\rangle=3/8$, ficamos com

$$\langle L\rangle\approx\frac{1}{4}\dot{A}^2+\frac{1}{4}A^2\omega_0^2+\frac{1}{2}A^2\omega_0\dot{\varphi}-\frac{1}{4}\omega_0^2A^2-\frac{3\xi}{8}A^4 \quad , \qquad (10)$$

o que nos fornece a expressão final

$$\langle L\rangle\approx\frac{1}{4}\dot{A}^2+\frac{1}{2}A^2\omega_0\dot{\varphi}-\frac{3\xi}{8}A^4 \quad . \qquad (11)$$

- Euler-Lagrange aplicado no grau de liberdade φ em (11) nos informa que

$$\frac{d}{dt}(\omega_0 A^2)=0 \quad , \qquad (12)$$

o que implica em amplitudes contantes.

- Euler-Lagrante aplicado em A de (11), por sua vez nos informa que

$$\dot{\varphi} = \frac{3\,\xi\,A^2}{2\,\omega_0} \quad . \quad (13)$$

- Conclusão final. O movimento completo preserva a amplitude, mas adquire uma correção de freqüência *dependente da amplitude*! Isto contrasta fortemente com o oscilador não perturbado em que a freqüência *independe* da amplitude – esta variação de comportamento é o sinal claro da participação de efeitos não lineares!

-Problema: Imaginem um oscilador com sua freqüência original variando lentamente, e de forma conhecida, no tempo:

$$L = \frac{1}{2}\,\dot{x} - \frac{1}{2}\,\omega_0^2(t)\,x^2 \quad . \quad (14)$$

Usemos o Método Variacional para resolver o problema. Para tanto comecemos com uma solução "ansatz" do tipo

$$x(t) = A(t)\cos\theta\,, \qquad (15)$$

onde escrevemos a fase θ do oscilador em termos de sua alta freqüência ω_0 e de uma correção lentamente variável $\varphi=\varphi(t)$, na forma $\theta \equiv \int^t \omega_0(t)\,dt + \varphi$. Supondo que a amplitude também varie lentamente no tempo, mostrem que o Lagrangeano efetivo que descreve o movimento modulacional (após médias sobre a alta-freqüência) adquire a forma

$$\langle L \rangle = \frac{1}{4}\,\dot{A}^2 + \frac{1}{4}\,\dot{\theta}^2 A^2 - \frac{1}{4}\,\omega_0^2 A^2 \quad . \quad (16)$$

Apliquem Euler-Lagrange para A e φ em (16) e mostrem que a amplitude A é governada pela equação

$$\ddot{A} = \frac{C^{te.}}{A^3} - \omega_0^2 A \quad , \quad (17)$$

onde $C^{te.}$ denota uma constante. A seguir concluam que se negligenciarmos a ultra-lenta segunda derivada temporal de A em (17),

$$\omega_0(t)\,A^2(t) = \sqrt{C^{te.}} \quad , \quad (18)$$

o que caracteriza o regime *adiabático* na teoria de oscilações.