

Ondas Lineares em Plasmas

Consideremos uma onda se propagando ao longo de um eixo x , com todo o movimento do plasma também sendo unidimensional, ao longo de x . Estaremos portanto supondo que o campo elétrico impulsionando o movimento também está orientado ao longo de x : $E = E_x \hat{x}$. As equações macroscópicas derivadas no resumo anterior então indicam:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial nv}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{e}{m} E, \quad (2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{e}{\epsilon_0} (n_0 - n). \quad (3)$$

Estamos aqui supondo que íons são fixos, que $-e$ seja a carga eletrônica que a velocidade de equilíbrio seja nula e que a densidade de equilíbrio eletrônica seja dada por n_0 .

Suponhamos também que estejamos trabalhando em um regime linear onde termos quadráticos nas perturbações em torno do equilíbrio sejam ignorados. Assim ficamos com as seguintes equações aproximadas:

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{e}{m} E_1, \quad (5)$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial x} = -\frac{e}{\epsilon_0} n_1, \quad (6)$$

onde $n = n_0 + n_1 + n_2 + \dots, n_n \gg n_{n+1}$, com um ordenamento idêntico para a velocidade e campo elétrico; notar também que $v_0 = 0$ e que $E_0 = 0$. Derivando a Eq. (5) em relação a x , derivando a (4) em relação a t , e combinando as duas juntamente com a expressão (6), chega-se a

$$\frac{\partial^2 n_1}{\partial t^2} = \frac{-n_0 e^2}{\epsilon_0 m} n_1. \quad (7)$$

Buscando soluções harmônicas do tipo $n_1 \sim e^{i(kx - \omega t)}$, a Eq. (7) indica que as ondas de densidade em um plasma vibram com frequência $\omega_p \equiv \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m}}$, conhecida como *frequência de plasma*. A relação de dispersão independe do vetor de onda k , enquanto termos com temperatura estejam ausentes do formalismo.

Ondas Não Lineares

O que acontece quando não ignoramos os termos não lineares? Bem, para responder esta pergunta, busquemos soluções do tipo onda propagante, onde cada variável será escrita na forma genérica $g = g(x - V_\phi t) \equiv g(\xi)$, onde agora a forma da função g ainda é incógnita. V_ϕ é a velocidade de fase da onda.

Lembrando que $E = -\nabla \varphi$, as Eqs. (1,2) nos indicam que

$$-V_\phi n + n v = -V_\phi n_0, \quad (8)$$

e que

$$-V_\phi v + \frac{1}{2} v^2 - \frac{e}{m} \varphi = 0, \quad (9)$$

onde já estamos usando a condição de que assintoticamente $n \rightarrow n_0$ e $v \rightarrow 0$. A raiz de (9) que se cancela no infinito é dada por $v = V_\phi - \sqrt{V_\phi^2 + 2e\varphi/m}$. Através da Eq. (8) a densidade é escrita em termos da velocidade, velocidade esta que por sua vez é portanto escrita em termos do potencial φ . Temos portanto uma expressão para a densidade em termos do potencial, que pode ser inserida em (3) para produzir a equação não linear desejada:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = \frac{e n_0}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 2e\varphi/m V_\phi^2}} - 1 \right). \quad (10)$$

A Eq. (10) adequadamente reescalada à variáveis adimensionais nos fornece

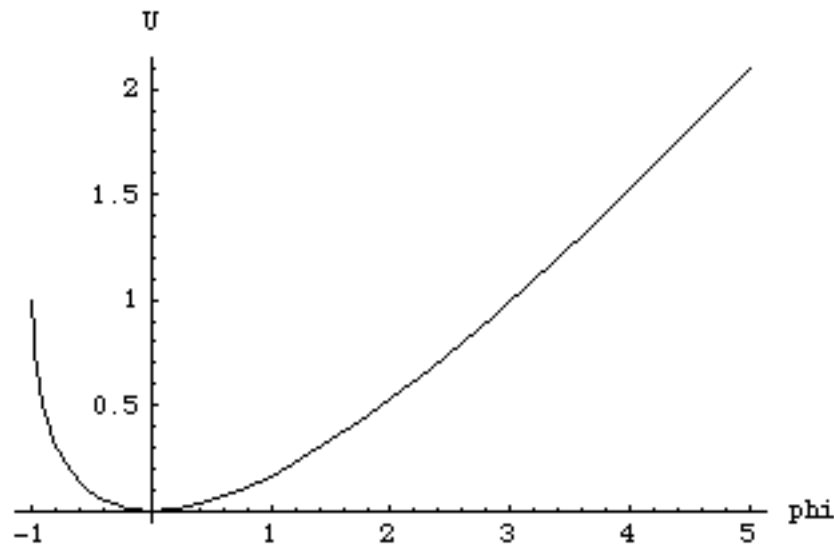
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\varphi}} - 1 \right); \quad (11)$$

aqui usamos $2e\varphi/mV_\phi^2 \rightarrow \varphi$ e $\xi^2 2n_0 e^2 / \epsilon_0 m V_\phi^2 \rightarrow \xi^2$.

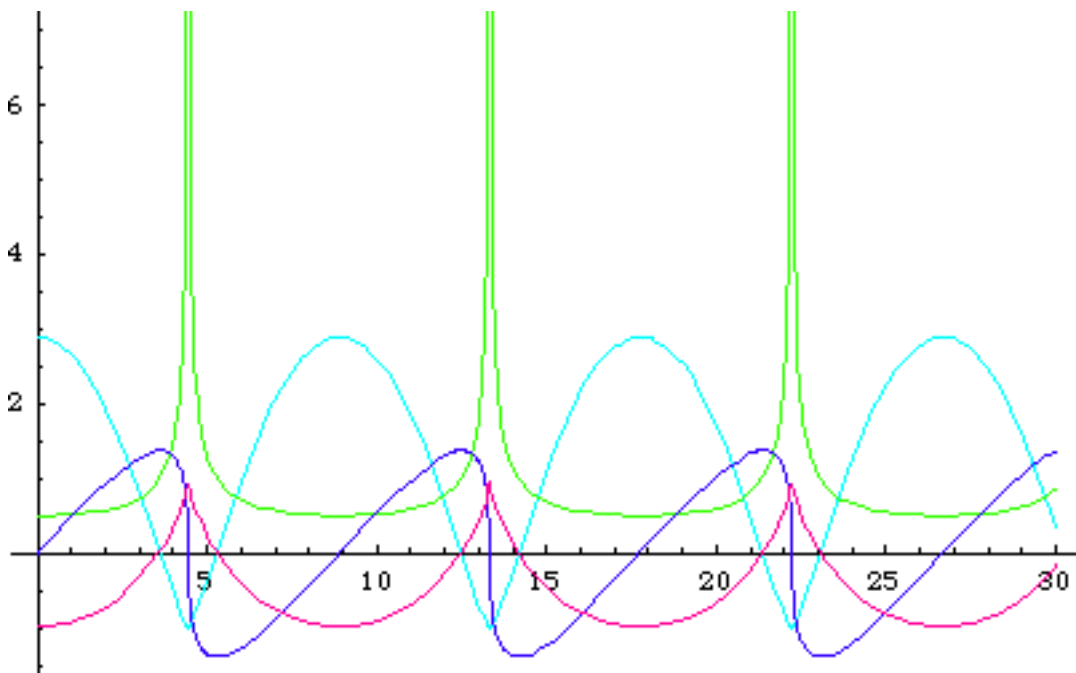
A Eq. (11) pode ser colocada na forma de uma equação de potencial efetivo U de aspecto Newtoniano:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad (12)$$

onde $U \equiv (1 - \sqrt{1+\varphi})^2$ (basta usar as seguintes correspondências entre um sistema Newtoniano $x = x(t)$ e nosso problema $\varphi = \varphi(\xi) : t \Leftrightarrow \xi, x \Leftrightarrow \varphi$). O potencial possui portanto um limite inferior dado por $\varphi_{critico} = -1$. Neste ponto U adquire derivada infinita negativa, e age como uma parede refletindo instantaneamente o movimento da assim chamada quase-partícula descrita pela coordenada φ . Dêem uma olhada no gráfico abaixo.



E o gráfico a seguir mostra como várias quantidades se comportam na integração numérica de (12).



O eixo horizontal representa ξ , verde a densidade, azul claro o potencial φ , vinho claro a velocidade, e lilás o campo elétrico. Notem que há picos de densidade onde o potencial se aproxima do limite crítico. Isto significa que partículas estão sendo praticamente *arrastadas* pela onda gerando densidades enormes nestes pontos – imaginem um limpa-neves para ter uma boa visualização do que está acontecendo. Notem que o pico de velocidade do fluido neste ponto coincide com a velocidade de fase normalizada $V_\phi=1$! Este é o limiar de quebra de ondas, onde partículas não conseguem mais cruzar a onda, sendo refletidas para frente por ela.