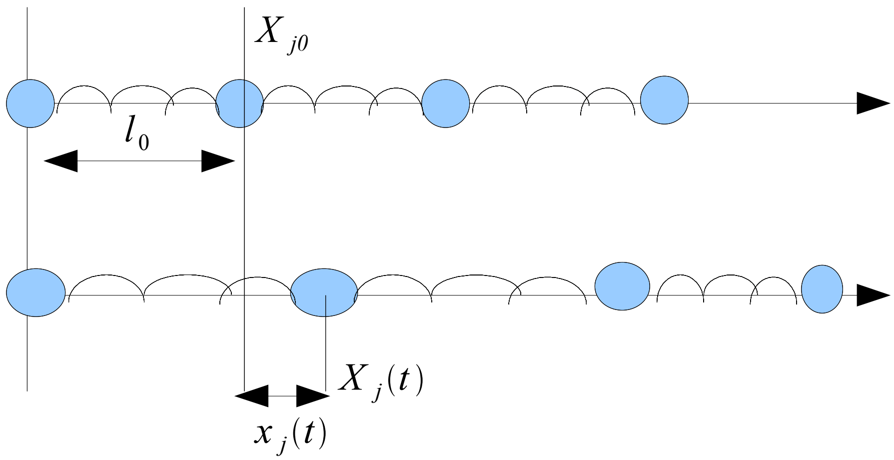
Cadeias de Osciladores.

- Imaginem um sistema de *N+2* massas m dispostas ao longo de um eixo *x*. Cada massa é ligada à suas vizinhas imediatas por molas harmônicas de comprimento de equilíbrio l_0 e constante elástica κ . A massa da extrema esquerda é fixada na posição $X_0=0$, e a da extrema direita é fixada na posição $X_0=(N+1)\,l_0$. A partir do estado de equlíbrio uniforme (linha superior da figura a seguir), as massas são postas em movimento (linha inferior da figura). Nossa tarefa é a de descrever tal movimento oscilatório.



- Da figura acima, enquanto $X_j(t)$ descreve a posição absoluta da partícula *j*, $x_j(t)$ decreve sua flutuação em torno da posição de equilíbrio X_{j0} . O Lagrangeano completo se escreve como

$$L=\frac{m}{2}\sum_n \dot{X}_n^2-\frac{\kappa}{2}\sum_n (X_{n+1}-X_n-l_0)^2 \quad . \quad (1)$$

- Notando, da figura, que podemos escrever $X_n=X_{n0}+x_n=n\,l_0+x_n$, o Lagrangeano assume a forma

$$L=\frac{m}{2}\sum_n \dot{x}_n^2-\frac{\kappa}{2}\sum_n (x_{n+1}-x_n)^2 \quad . \quad (2)$$

Se estivermos interessados em obter a Equação de Euler-Lagrange para uma partícula de índice *j* arbitrário, devemos colecionar os termos de (2) em que ela está presente:

$$L_j=\frac{m}{2}\dot{x}_j^2-\frac{\kappa}{2}[(x_{j+1}-x_j)^2+(x_j-x_{j-1})^2] \quad , \quad (3)$$

de onde segue, via Euler-Lagrange:

$$\ddot{x}_j=\frac{\kappa}{m}\left(x_{j+1}-2x_j+x_{j-1}\right) \quad . \quad (4)$$

- Buscando inspiração no oscilador harmônico, tentemos soluções (na forma complexa) do tipo

$$x_n = a_n e^{-i\omega t} \quad , \quad (5)$$

onde a_n depende do índice de partícula, mas não depende de t. A freqüência ω e as amplitudes a_n devem ser determinadas para a solução completa do problema.

- A inserção de (5) em (4) produz

$$-\omega^2 a_j = \frac{\kappa}{m}\left(a_{j+1} - 2a_j + a_{j-1}\right) \quad . \quad (6)$$

Buscando soluções para a equação a diferenças finitas (6) na forma

$$a_n = A e^{in\gamma} \quad , \quad (7)$$

ficamos com $-\omega^2 = \frac{\kappa}{m}\left(e^{i\gamma} - 2 + e^{-i\gamma}\right)$, o que finalmente gera [lembrem que $1 - \cos\theta = 2\sin^2(\theta/2)$]

$$\omega^2 = \frac{4\kappa}{m}\sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) \quad . \quad (8)$$

(Notem um fator corretivo 2 de diferença, em relação ao cálculo feito em aula.)

- O fator γ é ainda indeterminado. Se o determinarmos, também determinaremos a freqüência ω . Para obter γ , primeiro devemos selecionar a componente "seno" da representação complexa (7). Somente esta componente se anula quando o índice de partícula vai a zero para a partícula na origem. Ficamos então com

$$a_j = A \sin(j\gamma) \quad . \quad (9)$$

Outra condição de contorno nasce quando exigirmos que $a_{N+1} = 0$, o que deve acontecer com a partícula fixa na extremidade direita de nosso sistema. Daqui, e de (9), concluímos finalmente que qualquer γ satisfazendo $(N+1)\gamma = r\pi$, $r = 0,1,2,3,\ldots$, ou,

$$\gamma \rightarrow \gamma_r \equiv \frac{r\pi}{N+1}, \ r = 0,1,2,3\ldots.. \qquad (10)$$

é solução do problema (*r* negativos geram as mesmas soluções, com sinal trocado). De fato as soluções *r=0, N+1* não estão associadas a nenhum movimento. São soluções nulas, ou neutras. A partir delas, as configurações dos modos oscilatórios se repetem e nada de independente surge. Concluímos então que há N modos vibratórios independentes para nosso sistema, um para cada *0<r<N+1*.

- Problema: Resolvam todos os modos oscilatórios de uma cadeia de $N=2$ partículas acopladas.

- Problema: Resolvam todos os modos oscilatórios de uma cadeia de $N=3$ partículas acopladas.

- Problema: Encontrem as condições de contorno adequadas para modelar uma cadeia oscilatória cujo extremo da direita esteja livre: não está nem fixo nem submetido à força da partícula vizinha à sua direita. Expliquem porque este tipo de modo pode representar uma corda com extremidade livre. Calculem o espectro de freqüências ao estilo do conjunto de Eqs. (8), (9) e (10) acima, examinem a menor e a comparem com o resultado de nosso modelo anterior para a corda “carregada”.